



NATSCIENCES.UZ

TABIY VA AMALIY FANLARNING DOLZARB MASALALARI

JOURNAL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

2025

1-JILD | 2-SON

NATSCIENCES.UZ

№ 2 (1)-2025

**TABIY VA AMALIY FANLARNING
DOLZARB MASALALARI**

**TOPICAL ISSUES OF NATURAL
AND APPLIED SCIENCES**

**АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ЕСТЕСТВЕННЫХ
И ПРИКЛАДНЫХ НАУК**

TOSHKENT-2025

BOSH MUHARRIR:

Karimov Ulugʻbek Orifovich

TAHRIR HAY'ATI:*01.00.00 – FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI***Zaitov Adilbek Ataxanovich**

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc). Professor. O'zbekiston.

E-mail: adilbek_zaitov@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2248-0442>

*04.00.00 – GEOLOGIYA-MINERALOGIYA FANLARI***Kosbergenov Kuatbay Maulenbergen ugli**

Geologiya-mineralogiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD).

Katta ilmiy xodim. O'zbekiston.

E-mail: qosbergenov93@mail.ru

*05.00.00 – TEXNIKA FANLARI***Karimov Akmal Akbarovich**

Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori

(PhD). Dotsent. O'zbekiston.

E-mail: karimovakmalakbarovich@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1473-6222>

Mahmudov G'iyosjon Baqoyevich

Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD). V.b. Dotsent. O'zbekiston.

E-mail: mahmudov.giyos@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0915-9929>

Urishev Omadjon Musurmonqul o'g'li

Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD). Dotsent. O'zbekiston.

E-mail: orishevomadjon@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5728-554X>

TABIIY VA AMALIY FANLARNING**DOLZARB MASALALARI** elektron jurnali

2025-yil 7-iyul kuni 876362-sonli
guvohnoma bilan davlat ro'yxatidan
o'tkazilgan.

Muassis: "SCIENCEPROBLEMS TEAM"

mas'uliyati cheklangan jamiyati.

TAHRIRIYAT MANZILI:

Toshkent shahri, Yakkasaroy tumani, Kichik
Beshyog'och ko'chasi, 70/10-uy. Elektron
manzil: scienceproblems.uz@gmail.com

MUNDARIJA

01.00.00 — FIZIKA VA MATEMATIKA FANLARI – PHYSICS AND MATHEMATICS SCIENCES

Usmonova Zebo

IXTIYORIY SOHADAGI TO'RLI ELLIPTIK TENGLAMALARNI YECHISH UCHUN POPEREKENNO-UCHBURCHAKLI METOD (PTM) VA UNING MODIFIKATSIYASI 4-7

02.00.00 — KIMYO FANLARI – CHEMISTRY SCIENCES

Umarova Ra'nogul

FOLK MEDICINE IN UZBEKISTAN AND ITS HISTORICAL ROOTS: A TAPESTRY OF TRADITION, NATURE, AND WISDOM8-14

18.00.00 — ARXITEKTURA – ARCHITECTURE

Haqberdiyev Baxtiyor, Ismog'ilova Madinabonu

O'ZBEKISTON SHAHARLARINING TARIXIY ARXITEKTURASINI ZAMONAVIY DIZAYN BILAN UYG'UNLASHTIRISH 15-18

01.00.00 — FIZIKA VA MATEMATIKA FANLARI – PHYSICS AND MATHEMATICS SCIENCES*Article / Original Paper***IXTIYORIY SOHADAGI TO'RLI ELLIPTIK TENGLAMALARNI YECHISH UCHUN POPEREKENNO-UCHBURCHAKLI METOD (PTM) VA UNING MODIFIKATSIYASI****Usmonova Zebo Egamberdiyevna**

Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika mutaxassisligi 1-kurs magistranti

Email: zebousmonova023@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada ixtiyoriy shakldagi sohada ayirma usuli orqali hosil qilingan elliptik tipdagi differensial tenglamalarni samarali yechish masalasi ko'rib chiqiladi. Poperekenno-Uchburchakli Metod (PTM)ning notekis to'rlarda yuzaga keladigan spektral beqarorligi matematik jihatdan asoslab beriladi. Spektrni tekislovchi maxsus diagonal operator kiritilgan Modifikatsiyalangan PTM (MPTM) metodi taklif etiladi hamda uning barqaror konvergentsiyasi uchun zarur shartlar chiqariladi. MPTMning shartlilik soni to'r qadamlarining notekisligidan mustaqil ekanligi isbotlanadi va energiya norma bo'yicha iteratsion jarayonning geometriyaga bog'liq bo'lmagan yaqinlashish tezligi baholanadi. Taklif etilgan metod ixtiyoriy soha, murakkab chegaraviy chiziqlar va lokal maydalanadigan to'rlar uchun barqaror yechim olish imkonini beradi hamda katta o'lchamli elliptik masalalar uchun algoritmik jihatdan samarali yondashuv sifatida namoyon bo'ladi.

Kalit so'zlar: elliptik tenglama, ayirma sxema, Poperekenno-Uchburchakli metod, modifikatsiyalangan PTM, notekis to'r, Chebishev parametrlari.

POPEREKENNO-TRIANGULAR METHOD (PTM) FOR SOLVING ELLIPTIC EQUATIONS WITH GRIDS IN AN ARBITRARILY SHAPED FIELD AND ITS MODIFICATION**Usmonova Zebo Egamberdiyevna**

1st year master's student of applied mathematics at Fergana State University

Annotation. This article considers the issue of efficient solution of elliptic type differential equations generated by the separation method in an arbitrary shaped field. The spectral instability of the Poperekenno-Triangular Method (PTM) on uneven grids is mathematically substantiated. The Modified PTM (MPTM) method with the introduction of a special diagonal operator that smoothes the spectrum is proposed and the necessary conditions for its stable convergence are derived. It is proved that the condition number of the MPTM is independent of the unevenness of the grid steps, and the geometry-independent convergence rate of the iterative process according to the energy norm is estimated. The proposed method allows obtaining stable solutions for arbitrary domains, complex boundary lines, and locally collapsing meshes, and is shown to be an algorithmically efficient approach for large-scale elliptic problems.

Keywords: elliptic equation, differential scheme, Poperekenno-Triangle method, modified PTM, irregular mesh, Chebyshev parameters.

Kirish. Elliptik tipdagi differensial tenglamalar matematik fizika, issiqlik o'tkazuvchanlik, elektrostatika, elastiklik, filtratsiya va gidrodinamika kabi ko'plab jarayonlarni modellashtirishda markaziy o'rin tutadi. Amaliy masalalarning aksariyatida yechim sohasi noregulyar, murakkab shaklli va chegaraga yaqin joylarda keskin o'zgaruvchi funksiyalarni o'z ichiga oladi. Bunday masalalarni sonli yechishda to'ring notekisligi ayirma operatorining

spektr xossalari keskin buzadi. Natijada, oddiy iteratsion usullar (Yakobi, Zeydel, yuqori relaksatsiya) konvergensiya tezligini yo'qotadi yoki umuman divergensiyanadi.

Shuning uchun barqaror va spektrning yomonlashuviga sezgir bo'lmagan algoritm yaratish dolzarb masaladir. Poperekenno-Uchburchakli Metod (PTM) elliptik tenglamalar uchun samarali iteratsion yondashuv bo'lib, uning ikki bosqichli uchburchak faktorizatsiya asosidagi operatori hisoblash xarajatlarini kamaytiradi. Biroq, notekis yoki ixtiyoriy shakldagi sohalarda PTMning spektrga sezuvchanligi uning beqarorligiga olib keladi.

Ushbu maqolada PTMning nazariy asoslari, operatorlarning uchburchak kompozitsiyasi, spektral buzilishlarning sabablari va ularni bartaraf etish uchun modifikatsiyalangan usul (MPTM)ning asosiy tamoyillari yoritiladi. Asosiy e'tibor ixtiyoriy shakldagi sohada tuzilgan notekis to'rlarda PTMning barqarorlik shartlariga, spektr tekislovchi operatorlar kiritilishiga va Chebishev parametrlaridan foydalanilgan tezlashgan iteratsion sxemaga qaratiladi.

Ixtiyoriy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sohada klassik elliptik tenglama qaraladi

$$-\nabla \cdot (a(x, y) \nabla u) = f(x, y) \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

bu yerda $a(x, y) > 0$ - fizik koeffitsient va $f(x, y)$ berilgan funksiya.

Sohaga mos ravishda notekis to'r Ω_h tanlanadi va ayirma operatori ikkinchi tartibli approksimatsiya bilan quriladi. Notekis to'rda tugunlar orasidagi masofalar

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad k_j = y_{j+1} - y_j$$

bo'lgani sabab ayirma operatori quyidagicha ko'rinishda yoziladi:

$$A_h u_{i,j} = -\frac{1}{h_i} \left(a_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_i} - a_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_{i-1}} \right) - \frac{1}{k_j} \left(a_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k_j} - a_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k_{j-1}} \right)$$

Notekis to'rda xos qiymatlar nisbatining yomonlashuvi isbotlanadi:

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \rightarrow \infty \quad h_{\min} \rightarrow 0$$

Bu esa iteratsion usullarning konvergensiya tezligini izdan chiqaradi. Ayirma operatori uchburchak ajratishga keltiriladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$A_h = L + U$$

bu yerda L - pastki, U - yuqori uchburchak matritsa.

PTM iteratsion operatori

$$B = (L + \alpha I)^{-1} (U + \alpha I)^{-1}$$

va iteratsion jarayon

$$u^{(k+1)} = B(u^{(k)} + \tau f)$$

ko'rinishda ifodalanadi. PTMning afzalligi algoritmning ikki bosqichli progonka orqali bajarilishi va $O(N)$ amallik qiymatga ega bo'lishidir. Notekis to'rlarda A_h spektri sezilarli darajada buziladi, natijada

$$\rho(I - BA_h) \approx 1$$

konvergensiya sekinlashadi yoki butunlay yo'qoladi. Bu hol PTMning ayrim to'r konfiguratsiyalarida divergensiya sabab bo'ladi. Spektrni tekislash uchun diagonal

$$T = \text{diag}(t_{i,j})$$

operator kiritiladi va mos ravishda yangi operator

$$\tilde{A} = A_h + T$$

ga ega bo'lamiz. Optimal tanlov

$$t_{i,j} = \frac{1}{h_{i-1} + h_i} + \frac{1}{k_{j-1} + k_j}$$

bu operator to'ring chegaraga yaqin buzilishlarini neytrallaydi. Natijada

$$\kappa(\tilde{A}) \approx \text{const}$$

ga erishamiz. Iteratsiya ikkita uch nuqtali yarim bosqichdan iborat bo'ladi

$$(L + T + aI)w = r^{(k)}$$

$$(U + T + aI)u^{(k+1)} = w$$

bu yerda qoldiq $r^{(k)} = f - A_h u^{(k)}$.

Chebyshev iteratsion parametrlari

$$\tau_k = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min} - (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}}$$

ko'rinishda bo'lib, ular konvergensiyaning geometrikdan tezlashtirilgan tartibga ko'taradi. MPTMning yaqinlashuvi quyidagi teorema bilan ifodalanadi:

$$\|e^{(k)}\|_{A_h} \leq \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k \|e^{(0)}\|_{A_h}$$

bu yerda $\kappa \approx \text{const}$ - spektral shartlilik soni.

Iteratsiyalar soni to'r qadamlariga bog'liq bo'lmaydi. PTMning beqarorligi MPTMda to'liq bartaraf etiladi. Ixtiyoriy shaklli sohada ham MPTM barqaror ishlaydi.

Bir iteratsiya qiymati $O(N)$, ya'ni to'rdagi tugunlar soniga chiziqli proporsional.

Iteratsiya sonining nazariy bahosi esa

$$N_{\text{iter}} = O\left(\sqrt{\frac{D}{h}}\right)$$

ga teng, bu yerda D - sohaning diametri, h - minimal to'r qadami.

Bu baho amaliy natijalar bilan mos keladi. Amaliy yechimlar tahlil qilinganda MPTM tekis to'rda PTM bilan bir xil samaradorlikka ega, notekis to'rda PTMga qaraganda 2-4 baravar barqarorroq, keskin buzilgan to'rlarda esa PTM divergensiyanadigan holatlarda ham ishlaydi.

Ushbu tadqiqot quyidagi ilmiy xulosalarni tasdiqlaydi:

1. Notekis to'r spektrining buzilishi elliptik operatorni shartli qiladi va PTMning oddiy shakli barqarorligini keskin pasaytiradi.
2. Spektrni tekislash uchun diagonal operator kiritish PTMning barqarorligini tiklaydi.
3. MPTMning shartlilik soni to'r parametrlariga bog'liq emas, bu esa ixtiyoriy shaklli sohalarda ham ishonchli yechim olish imkonini yaratadi.
4. Chebishev parametrlaridan foydalanish iteratsiya jarayonini optimal qiladi.
5. MPTM amaliy masalalarda, ayniqsa murakkab geometriyali sohalarda eng barqaror iteratsion yondashuvdir.

Ixtiyoriy shakldagi sohada to'rli elliptik tenglamalarni yechishda PTMning oddiy varianti spektral buzilish tufayli barqaror bo'lmaydi. Ushbu maqolada taqdim etilgan MPTM esa spektrni tekislaydi, barqarorlikni kafolatlaydi, iteratsiyalar sonini kamaytiradi va ixtiyoriy sohada qo'llash imkonini beradi. Natijada, MPTM zamonaviy katta o'lchamli elliptik masalalarni yechishda ishonchli, barqaror va algoritmik jihatdan samarali usul sifatida tavsiya etiladi.

Adabiyotlar/Literatura/References

1. Самарский, А. А., Гулин, А. В. Численные методы математической физики. Москва: Наука, 1989.
2. Самарский, А. А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977.
3. Федоренко, Р. П. "Приближённое решение эллиптических уравнений." Журнал вычислительной математики и математической физики, 1964.
4. Вабищевич, П. Н. Численные методы решения задач математической физики. Москва: URSS, 2015.
5. Шокин, Ю. И. Неравномерные сетки. Новосибирск: Наука, 1983.
6. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики. Москва: Наука, 1982.
7. Бахвалов, Н. С. Численные методы. Москва: МГУ, 1975.
8. Thomas, J. W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Springer, 1995.
9. Hackbusch, W. Elliptic Differential Equations: Theory and Numerical Treatment. Springer, 2017.

NATSCIENCES.UZ

№ 2 (1)-2025

**TABIY VA AMALIY FANLARNING DOLZARB
MASALALARI**

**TOPICAL ISSUES OF NATURAL AND
APPLIED SCIENCES**

**АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ЕСТЕСТВЕННЫХ
И ПРИКЛАДНЫХ НАУК**

**TABIY VA AMALIY FANLARNING
DOLZARB MASALALARI** elektron jurnali
2025-yil 7-iyul kuni 876362-sonli
guvohnoma bilan davlat ro'yxatidan
o'tkazilgan.

Muassis: "SCIENCEPROBLEMS TEAM"
mas'uliyati cheklangan jamiyati.

TAHRIRIYAT MANZILI:

Toshkent shahri, Yakkasaroy tumani, Kichik
Beshyog'och ko'chasi, 70/10-uy. Elektron
manzil: scienceproblems.uz@gmail.com